

常州大学

2017 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 601 科目名称: 理学数学 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

(共 15 题, 每题 10 分, 共计 150 分)

1. 求以点 $M(2,1,0)$ 为球心且与平面 $3x+4y+5z=0$ 相切的球面方程。

2. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 。

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 按级别从高到低排列下面的三个无穷小量:

$$\alpha = 1 - \cos \sqrt{x}, \quad \beta = 1 - \sqrt[3]{\cos x}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} - \cos \sqrt[3]{x}.$$

4. 计算极限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} - 2}{x^2}$ 。

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$, 求 0 点的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ 。

6. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin ax}{|x|} \right)$ 存在, 求常数 a 的值。

7. 讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^t - 1}{x^2} \right)^{\frac{1 - \cos x}{t}}$ 在点 $x_0 = 0$ 的间断点类型。

8. 设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 2\pi\}$, 计算二重积分 $\iint_D |\sin(x-y)| d\sigma$ 。

9. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = e^x$ 及 x 轴所围成的平面图形记为 D 。

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成旋转体的体积。

10. 设 $y_1 = 3$, $y_2 = 3 + x^2$, $y_3 = 3 + e^x$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解, 求该微分方程及其通解。

11. 求函数 $f(x) = \int_0^{2x} \ln(1+t^2) dt - 2 \int_0^x t \ln(1+4t^2) dt$ 零点的个数。
12. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值。
13. 求证: $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) < \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 < \frac{16}{25}$ 。
14. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx$, 求证: 至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。
15. 当 $x > 0$ 时, 求证: $(x-2)e^x - (x-1)e^{2x} + 1 < 0$ 。