山东大学

二〇一九年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651　　　　科目名称 数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

一、计算题。（每题 20 分，共 60 分）

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

2. 交换积分次序 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. 计算线积分 $I=\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，其中 L 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，从 z 轴正向往下看，L 取反时针方向.

二、计算与证明题。（每题 15 分，共 30 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域.

2. 设 $a_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$，$\alpha>1$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

三、证明题。（每题 20 分，共 60 分）

1. 证明：广义积分 $\int_0^{+\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1]\mathrm{d}x$ 条件收敛.

2. 若 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

3. 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[0,\beta]$ $(\beta>0)$ 上一致收敛.