山 东 大 学

二〇一九年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825　　科目名称 线性代数与常微分方程

（请将所有试题答案写在答题纸上，写在试题上无效）

一、每小题 10 分，共 30 分。

1. 证明：对任意的 $m \ge n$，$r(A^n)=r(A^m)$，其中 A 是 n 阶方阵，r 是矩阵的秩。

2. 证明：若存在正整数 $k>n$ 使 n 阶方阵 A 有 $A^k=0$，则 $A^n=0$.

3. 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，a_i 为不全为零的实数，求 $E-A'A$ 的特征值，其中 E 为 n 阶单位阵，A' 为 A 的转置。

二、每小题 10 分，共 30 分。

1. 设 A，B 为 n 阶方阵，证明：AB 与 BA 有相同的特征多项式。

2. 设 A，B 分别为 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵，若 $n>m$，证明：AB 与 BA 的特征多项式差一个因子 λ^{n-m}.

3. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix},$$

求 $E+A$ 的特征值，其中 E 为 n 阶单位矩阵。

三、每小题 10 分，共 30 分。

1. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，$V_1=\mathcal{A}V$，$V_2=\mathcal{A}^{-1}(0)$ 分别是 $\mathcal{A}$ 的值域和核，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V_1 的一组基，设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的原象，令 $W=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$，证明：$V=W\oplus V_2$.

2. 设 M 是域 P 上的 n 阶方阵，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是域 P 上的多项式且 f 与 g 互质。令 $A=f(M)$，$B=g(M)$，设 V，V_1，V_2 分别是方程组 $ABX=0$，$AX=0$ 及 $BX=0$ 的解。判断并证明 $V=V_1+V_2$ 是否成立。

3. 判断并证明 $V=V_1\oplus V_2$ 是否成立。

四、共 40 分。

1. （10 分）求方程

$$(y+x^3y+2x^2)\mathrm{d}x+(x+4xy^4+8y^3)\mathrm{d}y=0$$

的通解。

2. （10 分）求方程

$$(y')^3+y^3-3yy'=0$$

的通解。

3. （20 分）求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3y-2x \end{cases}$$

的通解。

五、每题 10 分，共 20 分。

1. 试证若 $y=\varphi(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)\sin y$$

的满足初始条件 $\varphi(0)=0$ 的解，则 $\varphi(x)\equiv 0$，其中 $p(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

2. 设在方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中，$p(x)$ 在某区间 I 上连续且不恒等于零，试证：它的任意两个线性无关的解的朗斯基行列式是区间 I 上的严格单调函数。