2021 考研数学真题及答案解析

数学（二）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

(1)当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 时 x^7 的

(A)低阶无穷小.　　(B)等价无穷小.　　(C)高阶无穷小.　　(D)同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当 $x \to 0$ 时，$\left[\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\right]' = 2x(e^{x^6}-1) \sim 2x^7$，所以 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 高阶无穷小，正确答案为 C.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x \neq 0 \\ 1, x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值.　　(B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0.　　(D)可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，正确答案为 D.

(3)有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s，-3 cm/s，当底面半径为 10 cm，高为 5 cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

(A)$125\pi cm^3/s$，$40\pi cm^2/s$.

(B) $125\pi cm^3/s$，$-40\pi cm^2/s$.

(C)$-100\pi cm^3/s$，$40\pi cm^2/s$.

(D)$-100\pi cm^3/s$，$-40\pi cm^2/s$.

【答案】C.

【解析】由题意知，$\dfrac{dr}{dt}=2, \dfrac{dh}{dt}=-3,$ 又 $V=\pi r^2 h, S=2\pi rh+2\pi r^2$

则 $\dfrac{dV}{dt}=2\pi rh\dfrac{dr}{dt}+\pi r^2\dfrac{dh}{dt}, \dfrac{dS}{dt}=2\pi h\dfrac{dr}{dt}+2\pi r\dfrac{dh}{dt}+4\pi r\dfrac{dr}{dt}$

当 $r=10, h=5$ 时，$\dfrac{dV}{dt}=-100\pi, \dfrac{dS}{dt}=40\pi,$ 选 C.

(4)设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有两个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e,+\infty)$.　　(B) $(0,e)$.　　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$.　　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

【答案】A.

【解析】令 $f(x)=ax-b\ln x=0$，$f'(x)=a-\dfrac{b}{x}$，令 $f'(x)=0$ 有驻点 $x=\dfrac{b}{a}$，$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=a\cdot\dfrac{b}{a}-b\cdot\ln\dfrac{b}{a}<0$，从而 $\ln\dfrac{b}{a}>1$，可得 $\dfrac{b}{a}>e$，正确答案为 A.

(5)设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{2}.$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{2}.$

(C) $a=0,b=-\dfrac{1}{2}.$　　(D) $a=0,b=\dfrac{1}{2}.$

【答案】D.

【解析】由 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$ 知当 $f(x)=\sec x$ 时，$f(0)=\sec 0=1, f'(0)=(\sec x\tan x)\big|_{x=0}=0, f''(0)=(\sec x\tan^2 x+\sec^3 x)\big|_{x=0}=1,$

则 $f(x)=\sec x=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 故选 D.

(6)设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$.　　(B) $dx-dy$.　　(C) dy.　　(D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$　　①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$　　②

将 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 分别带入①②式有

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1,\quad f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故正确答案为 C.

(7) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$.

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知，将 $[0,1]$ 分成 n 份，取中间点的函数值，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n},$$

即选 B.

(8)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$.　　(B) $1,1$.　　(C) $2,1$.　　(D) $1,2$.

【答案】B.

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为 -1，3，0，故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.故应选 B.

(9)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$B=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2 线性表出，则

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解.

(B) $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解.

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解.

(D) $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解.

【答案】D.

【解析】令 $A=(a_1,a_2,a_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 由题 a_1,a_2,a_3 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，即存在矩阵 P，使得 $BP=A$, 则当 $B^Tx_0=0$ 时，$A^Tx_0=(BP)^Tx_0=p^TB^Tx_0=0$. 恒成立，即选 D.

(10)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$ 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C.

【解析】

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{pmatrix}$$

$=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$,则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}，则 \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.故应选 C.$$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx =$ ____________.

【答案】 $\dfrac{1}{\ln 3}$.

【解析】 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} x 3^{-x^2} dx = -\int_0^{+\infty} 3^{-x^2} d(-x^2) = -\dfrac{1}{\ln 3} \cdot 3^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{\ln 3}$.

(12)设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定,则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=0} =$ ____________.

【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【解析】 由 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4te^t + 2t}{2e^t + 1}$，得 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3}$，

将 $t = 0$ 带入得 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=0} = \dfrac{2}{3}$.

(13)设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)} =$ ____________.

【答案】 1.

【解析】 方程两边对 x 求导得 $z + (x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{2y}{1 + 4x^2 y^2} = 0$，

将 $x = 0, y = 2$ 带入原方程得 $z = 1$，再将 $x = 0, y = 2, z = 1$ 带入得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$.

(14)已知函数 $f(t) = \int_1^t dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\dfrac{x}{y} dy$,则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ____________.

【答案】 $\pi \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos u}{u^3} du - \dfrac{\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

【解析】 交换积分次序有 $f(t) = -\int_1^{\sqrt{t}} dy \int_{y^2}^t \sin\dfrac{x}{y} dx$，从而

$$\begin{aligned} f(t) &= -\int_1^{\sqrt{t}} dy \int_{y^2}^t \sin\frac{x}{y} dx = \int_1^{\sqrt{t}} y\left(\cos\frac{t}{y} - \cos y\right) dy \\ &= \int_1^{\sqrt{t}} y\cos\frac{t}{y} dy - \int_1^{\sqrt{t}} y\cos y dy \\ &= t^2 \int_{\sqrt{t}}^t \frac{\cos u}{u^3} du - \int_1^{\sqrt{t}} y\cos y dy \end{aligned}$$

$$f'(t)=2t\int_{\sqrt{t}}^{t}\frac{\cos u}{u^3}du+t^2\left(\frac{\cos t}{t^3}-\frac{\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)-\sqrt{t}\cos\sqrt{t}$$,故

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{u^3}du-\frac{\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(15)微分方程 $y'''-y=0$ 的通解 $y=$____________.

【答案】 $y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),C_1,C_2,C_3\in R$.

【解析】由特征方程 $\lambda^3-1=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故方程通解为

$$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),C_1,C_2,C_3\in R.$$

(16)多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为____________.

【答案】-5.

【解析】

$$f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x & 2 & -1\\ 1 & x & 1\\ -1 & 1 & x\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & x & 1\\ 2 & 1 & x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & x & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & x\end{vmatrix}-2x\begin{vmatrix}1 & x & 2\\ 2 & 1 & x\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

所以展开式中含 x^3 项的有 $-x^3,-4x^3$，即 x^3 项的系数为-5.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-1-\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x(1+t^2+o(t^2))dt=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$ ，故

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))(1+x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(18)(本题满分 12 分)

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

【答案】凹区间 $(-\infty,-1)$，$\left(0,+\infty\right)$，凸区间 $(-1,0)$.斜渐近线是 $y=x-1$，$y=-x-1$.

【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x},x>0\\ \dfrac{-x^2}{1+x},x\le 0\end{cases}$，故 $x>0$，$f'(x)=\dfrac{2x+x^2}{\left(1+x\right)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{\left(1+x\right)^3}$，

$x<0$，$f'(x)=\dfrac{-2x-x^2}{\left(1+x\right)^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2}{\left(1+x\right)^3}$，

所以

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,+\infty\right)$
$f''(x)$	+		-		+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

凹区间 $(-\infty,-1)$，$\left(0,+\infty\right)$，凸区间 $(-1,0)$.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$, $x=-1$ 是垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x|x|}{(1+x)x}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x|x|}{(1+x)}-1)=-1$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x|x|}{(1+x)x}=-1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x|x|}{(1+x)}-1)=-1$. 斜渐近线是 $y=x-1$，$y=-x-1$.

(19)(本题满分 12 分)

$f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$, L 为曲线 $y=f(x)(4\le x\le 9)$，L 的弧长为 s，L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A ,求 s 和 A .

【答案】$\dfrac{425\pi}{9}$.

【解析】$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1$，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$，

曲线的弧长 $s=\int_4^9\sqrt{1+y'^2}dx=\int_4^9\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4x}}dx=\dfrac{22}{3}$.

曲面的侧面积 $A=2\pi\int_4^9 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_4^9(\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+2}dx$

$$=\frac{425\pi}{9}.$$

(20)(本题满分 12 分)

函数 $y=y(x)$ 的微分方程 $xy'-6y=-6$，满足 $y(\sqrt{3})=10$，

(1)求 $y(x)$；

(2) P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点，曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_y，为使 I_y 最

小，求 P 的坐标.

【答案】(1) $y(x)=1+\dfrac{x^6}{3}$. (2) $P\left(\pm 1,\dfrac{4}{3}\right)$时，$I_y$ 有最小值$\dfrac{11}{6}$.

【解析】(1) $y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$ $,\therefore y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int(-\dfrac{6}{x})e^{-\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left(\dfrac{1}{x^6}+C\right)=1+Cx^6$

将 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$ 代入，$C=\dfrac{1}{3}$，$\therefore y(x)=1+\dfrac{x^6}{3}$.

(2)设 $P(x,y)$，则过 P 点的切线方程为 $Y-y=2x^5(X-x)$，

法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{2x^5}(X-x)$，

令 $X=0$，$\therefore Y=I_y=1+\dfrac{x^6}{3}+\dfrac{1}{2x^4}$，偶函数，为此仅考虑 $(0,+\infty)$

令 $\left(I_y\right)'=2x^5-\dfrac{2}{x^5}=0$，$x=1$.

$\therefore x\in(0,1)$，$\left(I_y\right)'<0$，$I_y>I_y(1)=\dfrac{11}{6}$；$x\in(1,+\infty)$，$\left(I_y\right)'>0$，$I_y>I_y(1)=\dfrac{11}{6}$

$\therefore P\left(\pm 1,\dfrac{4}{3}\right)$时，$I_y$ 有最小值$\dfrac{11}{6}$.

(21)(本题满分 12 分)

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geq 0,y\geq 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D ,求 $\iint\limits_D xydxdy$.

【答案】$\dfrac{1}{48}$

【解析】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta dr$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{16}\cos^2 2\theta d\cos 2\theta$$

$$=-\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.$$

(22)(本小题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵，求 a，b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

当 $b=3$ 时，由 A 相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，则

$(3E-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}$知，$a=-1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=3$所对应特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=1$所对应的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

当$b=1$时，由A相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，则

$(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}$，知$a=1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应特征向量为$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=3$所对应的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.