

2021 考研数学真题及答案解析

数学 (三)

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求, 把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

- (A) 低阶无穷小. (B) 等价无穷小. (C) 高阶无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\left[\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt \right]' = 2x(e^{x^6} - 1) \sim 2x^7$, 所以 $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 高阶无穷小, 正确答案为 C.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处

- (A) 连续且取极大值. (B) 连续且取极小值.
(C) 可导且导数为 0. (D) 可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 故 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 正确答案为 D.

(3) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- (A) $(e, +\infty)$. (B) $(0, e)$. (C) $(0, \frac{1}{e})$. (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

【答案】A.

【解析】令 $f(x) = ax - b \ln x = 0$, $f'(x) = a - \frac{b}{x}$, 令 $f'(x) = 0$ 有驻点 $x = \frac{b}{a}$, $f\left(\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b}{a} - b \cdot \ln \frac{b}{a} < 0$,

从而 $\ln \frac{b}{a} > 1$, 可得 $\frac{b}{a} > e$, 正确答案为 A.

(4) 设函数 $f(x, y)$ 可微, $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$. (B) $dx - dy$. (C) dy . (D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】 $f_1'(x+1, e^x) + e^x f_2'(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$ ①

$f_1'(x, x^2) + 2x f_2'(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$ ②

分别将 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 代入①②式有

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1, \quad f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$, $f_2'(1,1)=1$, $df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$, 故正确答案为 C.

(5)二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

- (A) 2, 0. (B) 1, 1. (C) 2, 1. (D) 1, 2.

【答案】 B.

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2 = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\lambda$$

令上式等于零, 故特征值为 $-1, 3, 0$, 故该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1. 故应选 B.

(6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶正交矩阵, 若矩阵 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 表示任意常数,

则线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解 $x =$

- (A) $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_2$.
(C) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + k\alpha_3$. (D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$.

【答案】 D.

【解析】 因为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶正交矩阵, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是一组标准正交向量

组, 则 $r(B) = 3$, 又 $B\alpha_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} \alpha_4 = \mathbf{0}$, 所以齐次线性方程组 $Bx = \mathbf{0}$ 的通解为 $k\alpha_4$. 而

$B(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$, 故线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解

$x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$, 其中 k 为任意常数. 故应选 D.

(7) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使 PAQ 为对角

矩阵, 则 P, Q 可以分别取

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【答案】C.

【解析】

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (F, P), \text{ 则 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 故应选 C.}$$

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中不成立的是

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

【答案】D.

$$\text{【解析】 } P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

$$P(\bar{A}|A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

因为 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 固有 $P(A) > P(B) - P(AB)$, 故正确答案为 D.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令

$$\theta = \mu_1 - \mu_2, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} \text{ 则}$$

$$(A) E(\hat{\theta}) = \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$$

$$(B) E(\hat{\theta}) = \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

$$(C) E(\hat{\theta}) \neq \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$$

$$(D) E(\hat{\theta}) \neq \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

【答案】 B

【解析】 因为 X, Y 是二维正态分布, 所以 \bar{X} 与 \bar{Y} 也服从二维正态分布, 则 $\bar{X} - \bar{Y}$ 也服从二维正态分布, 即 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta$,

$D(\hat{\theta}) = D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) - \text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$, 故正确答案为 B.

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}$, $P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为

$$(A) \frac{1}{4}. \quad (B) \frac{3}{8}. \quad (C) \frac{1}{2}. \quad (D) \frac{5}{2}.$$

【答案】 A.

【解析】 似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5$,

取对数 $\ln L(\theta) = 3\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + 5\ln\left(\frac{1+\theta}{4}\right)$;

求导 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{3}{1-\theta} + \frac{5}{1+\theta} = 0$, 得 $\theta = \frac{1}{4}$. 故正确答案为 A.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

$$(11) \text{ 若 } y = \cos e^{-\sqrt{x}}, \text{ 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{\sin \frac{1}{e}}{2e}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = -\sin e^{-\sqrt{x}} (e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{x}}) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\sin \frac{1}{e}}{2e}$.

$$(12) \int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 6.

【解析】 $\int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx = \frac{-1}{2} \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{d(9-x^2)}{9-x^2} + \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{d(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}} = 6$.

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x} \cdot \sin \pi x (0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} \sin \pi x)^2 dx = \pi \int_0^1 x \sin^2 \pi x dx = \underline{\underline{\pi x = t}} \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}$.

(14) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为_____.

【答案】 $y = y^* + \bar{y} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + C$, C 为任意常数.

【解析】 $\bar{y} = C$, $y^* = \frac{1}{2}(at+b)$, $(t+1)(a(t+1)+b) - t(at+1) = t$, $2at + a + b = t$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$,

$y = y^* + \bar{y} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + C$, C 为任意常数.

(15) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

【答案】 -5.

【解析】

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} - 2x \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

所以展开式中含 x^3 项的有 $-x^3, -4x^3$, 即 x^3 项的系数为-5.

(16) 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球. 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数

【答案】 $\frac{1}{5}$.

【解答】 联合分布率 $(X, Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{20}$, $DX = \frac{1}{4}$, $DY = \frac{1}{4}$, 即 $\rho_{XY} = \frac{1}{5}$.

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本小题满分 10 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} [\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在, 求 α 的值.

【答案】 $\alpha = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{e} - e)$.

【解析】 要想极限存在, 则左右极限相等;

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \frac{\pi}{2} \alpha + e$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = -\frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{e};$$

从而 $\frac{\pi}{2} \alpha + e = -\frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{e}$, 即 $\alpha = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e} - e \right)$.

(18)(本小题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.

【答案】 $(-1, 0)$ 处取极小值 2; $(\frac{1}{2}, 0)$ 处取极小值 $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

【解析】

$$(1) \begin{cases} f'_x = \frac{2x^2 + x - 1 - y^2}{x^3} = 0 \\ f'_y = \frac{y}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2x^2 + x - 1 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

$$(2) \begin{cases} f''_{xx} = \frac{(4x+1)x - 3(2x^2 + x - 1 - y^2)}{x^4} \\ f''_{xy} = \frac{-2y}{x^3} \\ f''_{yy} = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

(3) 驻点 $(-1, 0)$ 处, $A=3$, $B=0$, $C=1$, $AC - B^2 = 3 > 0$, $A > 0$
故 $f(x, y)$ 在 $(-1, 0)$ 处取极小值 2;

驻点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 处, $A=24$, $B=0$, $C=4$, $AC - B^2 = 3 > 0$, $A > 0$

故 $f(x, y)$ 在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 处取极小值 $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

(19)(本小题满分 12 分)

设有界区域 D 是 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = x$ 以及 x 轴在第一象限围城的部分, 计算二重积分

$$\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy.$$

【答案】 $\frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{4} e + \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) d\sigma &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 e^{r^2(\cos\theta + \sin\theta)^2} r^2 dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 e^{r^2(\cos\theta + \sin\theta)^2} r^2 dr^2 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} u du \\ \int_0^1 u e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} du &= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} \int_0^1 (\cos\theta + \sin\theta)^2 u e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} du (\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ &= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} \int_0^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} t e^t dt \\ &= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} - \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} [e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} - 1] \end{aligned}$$

$$\therefore \text{上式} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} e^{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^3} [e^{(\cos \theta + \sin \theta)^2} - 1] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u} e^{u^2} du - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{u^2} - 1}{u^3} du$$

$$\text{其中} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u} e^{u^2} du = \int_1^{\sqrt{2}} u^{-2} d\left(\frac{1}{2} e^{u^2}\right) = \frac{1}{2u^2} e^{u^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} e^{u^2}\right) (-2u^{-3}) du = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} e + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{u^2}}{u^3} du$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{e^2}{8} - \frac{e}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} u^{-3} du = \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{4} e + \frac{1}{8}.$$

(20)(本小题满分 12 分)

设 n 为正整数, $y = y_n(x)$ 是微分方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 满足条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1) 求 $y_n(x)$;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】(1) $y_n(x) = \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$; (2) 收敛域 $[-1, 1]$, $S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

(1) $y' - \frac{(n+1)y}{x} = 0$ 得 $y = Ce^{\int \frac{n+1}{x} dx} = Cx^{n+1}$, 将 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 代入, 有 $C = \frac{1}{n(n+1)}$,

$$y_n(x) = \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1};$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = (1-x)\ln(1-x) + x, x \in (-1, 1)$$

又因为 $S(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 所以 $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1$,

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

(21)(本小题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵, 求 a, b 的值, 并求可

逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

$$\text{【解析】由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

当 $b = 3$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量, 则

$$(3E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ 知, } a = -1,$$

此时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 所对应特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_3 = 1$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

当 $b=1$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量, 则

$$(E-A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \text{ 知 } a=1,$$

此时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 所对应特征向量为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_3 = 3$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

(22)(本小题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为 X , 较长的一段长度记为

Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】 (1) $x \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$; (2) $f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$. (3) $-1 + 2 \ln 2$.

【解析】 (1) 由题知: $x \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$;

(2) 由 $y = 2 - x$, 即 $Z = \frac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数:

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$$

当 $z < 1$ 时, $F_z(z) = 0$;

当 $z \geq 1$ 时,

$$F_z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases};$$

$$(3) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = -1 + 2 \ln 2.$$